

# θεωρητικός υπολογισμός της μαγνητικής ροπής, πυκνότητας ρεύματος και μαγνητικής επαγωγής υπεραγωγίων λεπτών υμενίων σχήματος παραλληλογράμμου

Μ. Πίσσας, Μ. Χολιαστού, Α. Θεοφίλου και Δ. Νιάρχος  
 Ινστιτούτο Επιστήμης Υλικών, ΕΚΕΦΕ 'Δημόκριτος', 15310 Αγ. Παρασκευή, Αττική

Σ' αυτή την εργασία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του θεωρητικού υπολογισμού της μαγνητικής ροπής, λεπτού υμενίου σχήματος παραλληλογράμμου δεδομένης της σχέσης ηλεκτρικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος, του ρυθμού μεταβολής και της τελικής τιμής του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

## I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις περισσότερες περιπτώσεις η μέτρηση υπεραγωγίων λεπτών υμενίων ή και μονοκρυστάλλων με σχήμα πλακιδίου η διεύθυνση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη στις δύο μεγαλύτερες διαστάσεις του δείγματος. Για την ανάλυση τέτοιου είδους μετρήσεων χρειάζεται ο θεωρητικός υπολογισμός της μαγνητικής επαγωγής και της πυκνότητας ρεύματος. Για να πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός υποθέτουμε ότι οι μαγνητικές δίνες βρίσκονται σε κατάσταση υαλώδη η οποία μπορεί να περιγραφεί φαινομενολογικά με μία σχέση που συνδέει το τοπικό ηλεκτρικό πεδίο με την πυκνότητα ρεύματος. Εάν υποθέσουμε λογαριθμική εξάρτηση της ενέργειας ενεργοποίησης για κίνηση των μαγνητικών δινών με την πυκνότητα ρεύματος  $[U(j) = U_c \ln(j_c/j)]$  η σχέση του  $E$  με το  $j$  θα είναι σχέση δυνάμεως ( $E(j) = E_c(j/j_c)^{n'}$ ) ή ισοδύναμα  $E = \rho j$ ,  $[\rho = (E_c/j_c)(j/j_c)^{(n'-1)}]$  όπου  $E$  είναι το ηλεκτρικό πεδίο,  $j$  η πυκνότητα ρεύματος,  $j_c$  η κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος και  $n' = U_c/kT$ . Για  $n' = 1$  έχουμε γραμμική συμπεριφορά (οι μαγνητικές δίνες μετακινούνται ελεύθερα), για  $n' \rightarrow \infty$  αναπαράγεται η κρίσιμη κατάσταση, ενώ για  $n' \gg 1$  οι μαγνητικές δίνες έρπουν με αποτέλεσμα την μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος. Για την απλοποίηση του προβλήματος θεωρούμε ότι  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ .

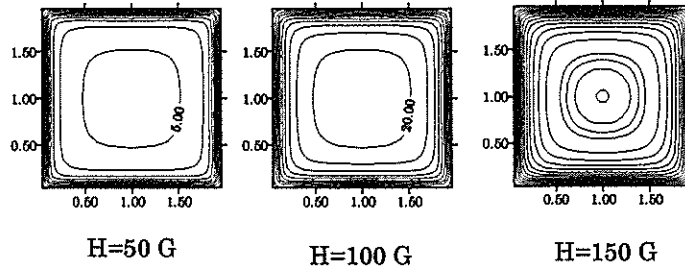


FIG. 1.  $H_z(x, y) = \text{const.}$  για  $H_a = 50, 100$  και  $150$  G όταν  $n = 0$ .

## II. ΛΕΠΤΟ ΥΜΕΝΙΟ ΣΕ ΚΑΘΕΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Θεωρούμε λεπτό υμένιο σχήματος παραλληλογράμμου μήκους  $2a$  και πλάτους  $2b$  το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο  $x - y$  υπό την επίδραση ομογενούς μαγνητικού πεδίου με διεύθυνση παράλληλη στον άξονα  $z$ ,  $\mathbf{H}_a(\mathbf{r}) = H_a \hat{z}$ . Συμβολίζουμε το 3D διάνυσμα θέσης με  $\mathbf{R} = (x, y, z)$  και το 2D με  $\mathbf{r} = (x, y)$ . Το πρόγραμμα ΗΥ που γράφθηκε βασίζεται στην θαυμάσια δουλειά του E. H. Brand (δες αναφορές 1-3) την οποία εν συντομία περιγράφουμε. Η πυκνότητα ρεύματος που θα διαρρέει το λεπτό υμένιο είναι της μορφής  $\mathbf{j}(\mathbf{R}) = (f_x(x, y)\hat{x} + f_y(x, y)\hat{y})\delta(z)$ , και το ολοκλήρωμα της ως προς  $z$  [στην ουσία στο πάχος του λεπτού υμενίου ( $d$ )] θα είναι μία επιφανειακή κατανομή ρεύματος  $\mathbf{J}(x, y) = \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, z) \approx d\mathbf{j}(x, y, 0)$ . Οι δύο συνιστώσες του  $\mathbf{J}$  μπορούν να εκφραστούν μέσω της ακόλουθης σχέσης με την βοήθεια μίας βαθμωτής συνάρτησης  $g(x, y)$ :

$$\mathbf{J}(x, y) = \nabla \times \hat{z}g = -\hat{z} \times \nabla g. \quad (1)$$

Η μαγνητική ροπή (μετρήσιμη ποσότητα) του λεπτού υμενίου εξ ορισμού δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \int g(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}. \quad (2)$$

Η ποσότητα  $g(x, y)/c$  εκφράζει την τοπική μαγνητική ροπή ανά μονάδα επιφάνειας. Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampère's η  $z$ -συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, όταν το υμένιο είναι υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού  $\mathbf{H}_a(\mathbf{r}) = H_a \hat{\mathbf{z}}$ , μπορεί να γραφεί

$$H_z(\mathbf{R}) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \frac{g(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}'}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + z^2]^{1/2}} + H_a = \int_A G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; z) g(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}' + H_a. \quad (3)$$

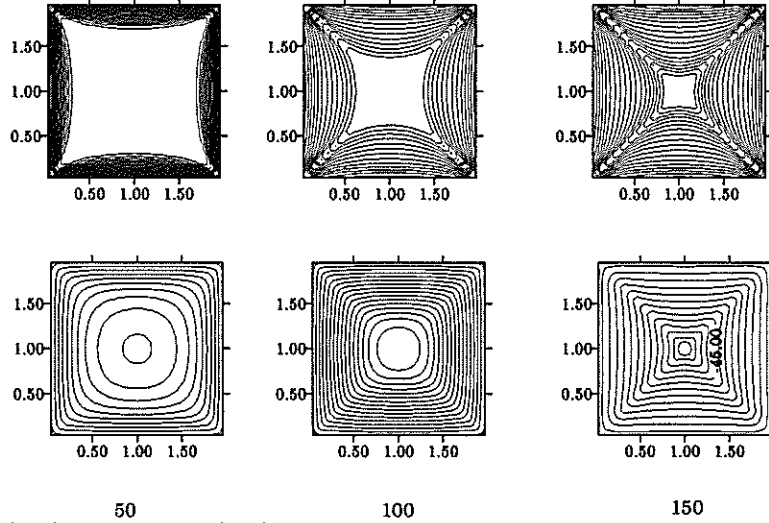


FIG. 2.  $H_z(x, y) = \text{const.}$  και  $g(x, y) = \text{const.}$  για  $H_a = 50, 100, 150$  G όταν  $n = 5$  και  $B_0 = \infty$ .

Για να προσδιοριστεί η εξίσωση κίνησης της  $g$  χρειαζόμαστε την Εξ. 3 στο όριο  $z \rightarrow 0$ . Ο υπολογισμός του πυρήνα  $G$  δεν είναι άμεσος διότι στο όριο  $z \rightarrow 0$  απειρίζεται σαν  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$  μέσα στο παραλληλόγραμμο όπου ισχύει  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , άρα η ολοκλήρωση στην Εξ. 3 πρέπει να γίνει αναλυτικά. Μία μέθοδος για τον υπολογισμό του πυρήνα αποφεύγοντας το πρόβλημα που προαναφέραμε είναι να χρησιμοποιήσουμε σειρές Fourier γιατί μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο  $z \rightarrow 0$  στους συντελεστές Fourier του  $G$ ,  $G_{\mathbf{K}\mathbf{K}'}$ . Επειδή η συνάρτηση  $g(\mathbf{r})$  μηδενίζεται στις πλευρές του παραλληλογράμμου μπορεί να αναπτυχθεί σε 2D σειρά ημίτονων

$$g(\mathbf{r}) = \sum_{K_x} \sum_{K_y} g_{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1}{ab}} \sin(K_x x) \sin(K_y y). \quad (4)$$

Ομοια σχέση μπορεί να γραφεί και για την  $z$ -συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου όπου  $K_x = m\pi/2a$ ,  $K_y = n\pi/2b$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$ . Όμως σε ομογενές εξωτερικό πεδίο η  $g(\mathbf{r})$  πρέπει να είναι αναλλοίωτη σε κατόπτρισμό σε σχέση με τα επίπεδα  $y = b$  και  $x = a$ . Η με άλλα λόγια  $g(x, y) = g(2a - x, y)$  και  $g(x, y) = g(x, 2b - y)$ . Για να ισχύουν οι προηγούμενες σχέσεις θα πρέπει  $m, n$  να είναι περιττοί ακέραιοι, συνεπώς,  $K_x = (2m - 1)\pi/2a$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , και  $K_y = (2n - 1)\pi/2b$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3\mathbf{Q} \frac{\exp[i\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')] }{Q^2} \quad (5)$$

όπου  $\mathbf{Q} = (q_x, q_z)$  και  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ , ο πυρήνας της Eq. 3 μπορεί να γραφεί

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; z) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{2\pi^2} \int d^3\mathbf{Q} \frac{\exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + iq_z z]}{q^2 + q_z^2}. \quad (6)$$

Αντικαταστήνοντας την Εξ. 4 και την αντιστοιχη για το  $H$  στην Eq. 3, πολλαπλασιάζοντας με  $\sqrt{1/ab} \sin(K_x x) \sin(K_y y)$  και ολοκληρώνοντας ως προς  $x, y$  παίρνουμε,  $h_{\mathbf{K}} = \sum_{\mathbf{K}'} G_{\mathbf{K}\mathbf{K}'} g_{\mathbf{K}'}$  όπου

$$G_{\mathbf{K}\mathbf{K}'} = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{2a} dx \int_0^{2a} dx' \int_0^{2b} dy \int_0^{2b} dy' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; z) \sqrt{\frac{1}{ab}} \sin(K_x x) \sin(K_y y) \sqrt{\frac{1}{ab}} \sin(K'_x x') \sin(K'_y y'). \quad (7)$$

Αν αντικαταστήσουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση του  $G$  από την Εξ. 6 και εκτελέσουμε την ολοκλήρωση ως προς  $z$ , πάρουμε το όριο  $z \rightarrow 0$  και τις ολοκληρώσεις ως προς  $x, y, x', y'$  τελικά παίρνουμε

$$G_{\mathbf{K}\mathbf{K}'} = \frac{8}{\pi ab c} \int_0^\infty dq_x \frac{K_x K'_x [1 + \cos(2aq_x)]}{(q_x^2 - K_x^2)(q_x^2 - K_x'^2)} \int_0^\infty dq_y q \frac{K_y K'_y [1 + \cos(2bq_y)]}{(q_y^2 - K_y^2)(q_y^2 - K_y'^2)}. \quad (8)$$

Η αντίστροφη ολοκληρωτική σχέση μεταξύ του  $H_z$  και  $g$  μπορεί να γραφεί  $g(\mathbf{r}, t) = \int G^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [H_z(\mathbf{r}', t) - H_a(t)] d^2 \mathbf{r}'$ . Όμως μέσα στο λεπτό υμένιο θα ισχύει  $\mathbf{E} = \rho_s \mathbf{J}$ , όπου  $\rho_s = \rho/d$  είναι η ειδική αντίσταση ανά μονάδα μήκους. Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. 1 το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφεί  $\mathbf{E} = -\rho_s \hat{z} \times \nabla g$ . Εφαρμόζοντας το νόμο του Faraday για την συνιστώσα  $H_z$ ,  $\dot{H}_z = -c(\hat{z} \times \nabla) \cdot \mathbf{E}$ , και αντικαθιστώντας στην θέση του  $\mathbf{E}$  την προηγούμενη σχέση παίρνοντας την παράγωγο ως προς το χρόνο της αντίστροφης σχέσης η χρονική εξέλιξη της τοπικής μαγνήτισης ανά μονάδα επιφάνειας δίνεται από την εξίσωση,

$$\dot{g} = \int G^{-1} [c \nabla \cdot (\rho_s \nabla g) - \dot{H}_a] d^2 \mathbf{r}'. \quad (9)$$

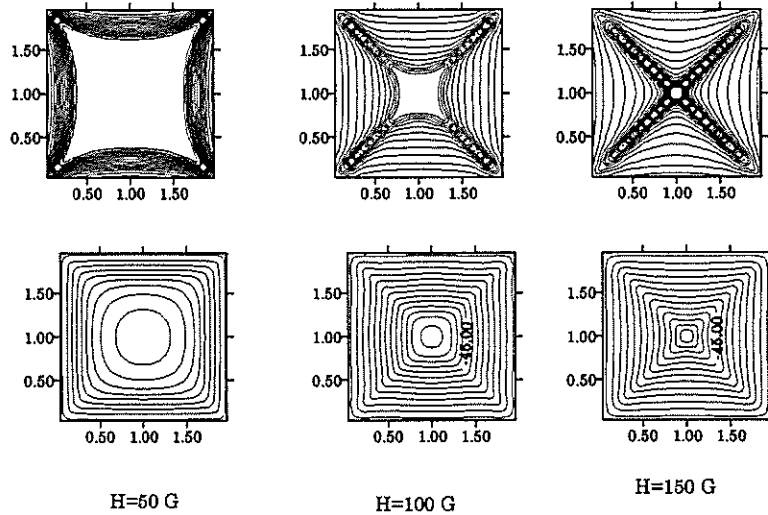


FIG. 3.  $H_z(x, y) = \text{const.}$  και  $g(x, y) = \text{const.}$  για  $H_a = 50, 100, 150$  G όταν  $n = 5$  και  $B_0 = 100$  G.

### III. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Για να υπολογιστεί το  $g$  δεδομένου του ρυθμού μεταβολής του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της συνθήκης  $g(\mathbf{r}, 0) = 0$  χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο. Θεωρούμε ένα πλέγμα σημείων μέσα στο παραλληλόγραμμο με συντεταγμένες  $x_i = (i - 1/2)a/N_x, i = 1, \dots, 2N_x$  και  $y_j = (j - 1/2)b/N_y, j = 1, \dots, 2N_y$ . Για να απλοποιηθεί ο συμβολισμός είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ζεύγος  $i, j$  ένα δείκτη  $\ell$  σύμφωνα με την σχέση  $\ell = (i - 1)N_y + j$ . Με την παραπάνω αντιστοίχιση οι τιμές της  $g(x_i, y_j)$  σχηματίζουν ένα διάνυσμα. Στη συνέχεια ορίζουμε τον πίνακα  $U(k, \ell) = (ab)^{-1/2} \sin[K_x(\ell)x(k)] \sin[K_y(\ell)y(k)]$ . Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος χρειάζεται να ξέρουμε την λύση μόνο σε ένα τεταρτημόριο του παραλληλόγραμμου. Προσεγγίζουμε την συνάρτηση  $g$  με πεπερασμένη σειρά Fourier η οποία μπορεί να γραφεί με την βοήθεια των παραπάνω ορισμών  $g_i = \sum U_{ij} \tilde{g}_j$  όπου  $\tilde{g}_j$  είναι οι συντελεστές Fourier της  $g$ . Προφανώς ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα δίνεται από την σχέση  $\tilde{g}_i = \sum U_{ij}^{-1} g_j$ . Με όμοιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί ο πυρήνας  $G_{ij}$  και ο αντίστροφος του  $G_{ij}^{-1}$  αφού μπορούμε να υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τα  $G_{\mathbf{K}\mathbf{K}'}$ . Οι χωρικές παραγωγίσεις των συναρτήσεων  $g, H_z, J$  μπορούν να γίνουν χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις από τις σειρές Fourier. Λαμβάνοντας υπόψη όλες τις παραπάνω παρατηρήσεις μεταβολή με το χρόνο των συντελεστών Fourier της συνάρτησης  $g$  θα δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{d\tilde{g}_\ell}{dt} = c \sum_k U_{\ell k}^{-1} \sum_m G_{km}^{-1} f_m \quad (10)$$

όπου  $f_m = \nabla \cdot (\rho_s \nabla g) - (1/c) \dot{H}_a$  στο σημείο  $m$ . Η ολοκλήρωση της Εξ. 10 μπορεί να γίνει αριθμητικά με αρχική συνθήκη  $g_\ell = 0$ . Αφού υπολογιστούν οι συντελεστές  $\tilde{g}_i$  για κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να υπολογίσουμε την  $g(x_i, y_i, t)$  και από αυτή την μαγνητική ροπή του υμενίου μέσω της προσεγγιστικής σχέσης  $m(t) \approx 4ab \sum_i g_i(t)/cN_x N_y$ .

#### IV. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για την αριθμητική ολοκλήρωση της Εξ. 10 επιλέξαμε ένα τετράγωνο με  $a = b = 1$  cm. Το πλέγμα ήταν  $24 \times 24$  σημεία ( $N_x = N_y = 12$ ). Η κρίσιμη επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος ήταν  $J_{c0} = 10^2$  Amp/cm ενώ η ειδική αντίσταση ανά μονάδα μήκους  $\rho_{s0} = 10^{-3}$  Ohm's. Η παράμετροι που μεταβάλαμε ήταν ο εκθέτης  $n$  της σχέσης  $\rho = \rho_{r0}(J/J_c)^n$  και η παράμετρος  $B_0$  που εμπεριέχεται στην σχέση  $J_c = J_{c0}/(1 + |H|/B_0)$ . Τέλος, υποθέσαμε ότι το εξωτερικό πεδίο αυξάνει με σταθερό ρυθμό  $\dot{H}_a = 20/3$  G/sec για χρόνο από 0 έως 30 sec ενώ για χρόνο μεγαλύτερο από 30 sec παραμένει σταθερό ( $\dot{H}_a = 0$ ) στην τιμή 200 G. Στο σχήμα 1 φαίνονται οι ισοϋψείς του  $H_z(x, y)$  στην περίπτωση που η  $\rho$  είναι ανεξάρτητη από την  $J$  ( $n' = 1$  ή  $n = 0$ ) όταν  $H_a = 50, 100$  και  $150$  G. Στα σχήματα 2 και 3 φαίνονται η  $H_z(x, y) = \text{const}$  και η  $g(x, y) = \text{const}$  για  $n = 5$  και  $B_0 = \infty, B_0 = 100$  G αντίστοιχα. Τέλος στο σχήμα 4 φαίνονται οι  $H_z(x, y) = \text{const}$  για  $n = 10$  όταν  $H_a = 47, 80, 113$  και  $170$  G και 1, 7 και 37 sec μετά το μηδενισμό του  $\dot{H}_a$ . Η περιοχή όπου  $H_z = 0$  είναι στο κέντρο του τετραγώνου και είναι στην ουσία η κατάσταση Meissner. Από τα παραπάνω σχήματα διαπιστώνουμε ότι η διείσδυση της μαγνητικής ροής γίνεται σε σχήμα άστρου όταν  $n' > 1$ . Το μέτωπο της ροής είναι κυρτό, διεισδύοντας πρώτα από τα μέσα των τεσσάρων πλευρών παρά από τις γωνίες. Το συγκεκριμένο σχήμα του μετώπου φαίνεται μόνο αν η  $\rho$  εξαρτάται από το την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1 στην γραμμική περίπτωση το μέτωπο διείσδυσης είναι κοίλο. Οι ρευματικές γραμμές αλλάζουν μονότονα από το κοίλο αρχικό σχήμα όταν  $H_z = 0$  σε παράλληλες στις πλευρές. Οι περιοχές με  $J = J_c$  αναπτύσσονται από τα μέσα των πλευρών. Στο σχήμα 4 φαίνεται πως η κατανομή του  $H_z$  αλλάζει ώστε να έχουμε μείωση του  $J$  (κατάσταση ερπυσμού).

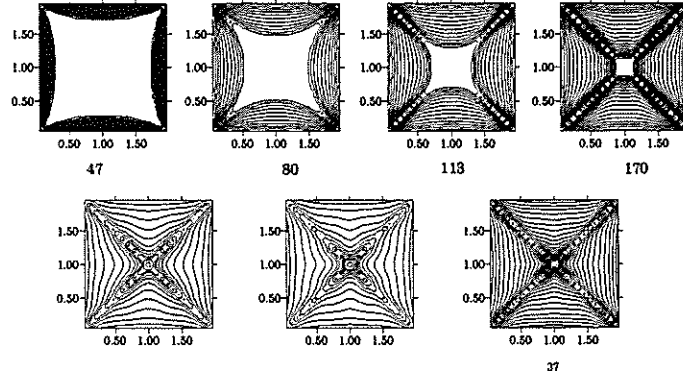


FIG. 4.  $H_z(x, y) = \text{const}$  για  $H_a = 47, 80, 113, 170$  G και 1, 7 και 37 sec μετά από  $\dot{H}_a = 0$  όταν  $n = 10$ .

- 
- [1] E. H. Brandt, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 3025.
  - [2] T. Schuster et al, Phys. Rev. B .52 (1995) 10375.
  - [3] E. H. Brandt, Phys. Rev. B.52 (1995) 15442.