ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΜΗΚΟΥΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΠΛΑΚΙΔΙΩΝ ΜΗΚΟΥΣ - MONTE CARLO ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

Χρήστος Μπαντής, Ιωάννης Κουρούπας
Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας
Βιομηχανική Περιοχή Θεσσαλονίκης, Οικ. Τετρ. 45
57022 Σίνδος, Θεσσαλονίκη
e-mail: bandis@eim.org.gr

Η διακρίβωση πρότυπων πλακιδίων μήκους με μηχανικό συγκριτή απαιτεί σύμφωνα με το ISO 3650 την μέτρηση του μήκους τους σε πέντε σημεία (κεντρικό μήκος και τέσσερις γωνίες). Ως διακύμανση του μήκους (variation in length) των πρότυπων πλακιδίων ορίζεται η διαφορά μήκους μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης μετρούμενης τιμής μεταξύ των πέντε αυτών σημείων. Η διακύμανση του μήκους των πλακιδίων μαζί με την απόκλιση του κεντρικού μήκους από την ονομαστική τους τιμή χρησιμοποιούνται για την κατάταξη των πλακιδίων σε κλάσεις. Συνεπώς η σωστή μέτρηση της διακύμανσης του μήκους των πλακιδίων και ο υπολογισμός της αβεβαιότητας της καθορίζουν πια πλακίδια δεν πληρούν τις προδιαγραφές της κλάσης τους και άρα πρέπει να αντικατασταθούν. Στην εργασία αύτη θα παρουσιάσουμε το μοντέλο υπολογισμού της αβεβαιότητας της διακύμανσης μήκους των πλακιδίων. Το μοντέλο αυτό δεν πληροί όλες τις προϋποθέσεις εφαρμογής του αναλυτικού υπολογισμού όπως αυτές περιγράφονται στο “Guide to the expression of uncertainty in measurement”-GUM, με αποτέλεσμα η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων υπολογισμού (Monte Carlo) να κρίνεται απαραίτητη. Ο αριθμητικός υπολογισμός της αβεβαιότητας με αλγόριθμούς που λαμβάνουν υπόψη τους και την ύπαρξη πεπερασμένων βαθμών ελευθερίας καθώς και η σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της αναλυτικής μεθόδου θα συζητηθούν διεξοδικά

Λέξεις-Κλειδιά: Πρότυπα μήκους, πλακίδια μήκους, Monte Carlo, αβεβαιότητα, διακύμανση μήκους.

1. Εισαγωγή

Εδώ και αρκετά χρόνια έχει γίνει γενικώς αποδεκτό ότι το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης, για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τρόπο ουσιαστικό, πρέπει να συνοδεύεται και από την εκτίμηση της αβεβαιότητας της μέτρησης αυτής. Για το υπολογισμό της αβεβαιότητας μίας μέτρησης στις περισσότερες των περιπτώσεων ακολουθείται η μέθοδος της διάδοσης των αβεβαιοτήτων (Law of Propagation of Uncertainties-*LPU*), όπως αυτή περιγράφεται στην οδηγία *"Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement"*, στην οποία θα αναφερόμαστε και ως *GUM*[1].

Η μέθοδος αυτή του υπολογισμού των αβεβαιοτήτων[1-4], ως πρώτο βήμα έχει την επιλογή του μαθηματικού μοντέλου το οποίο περιγράφει τη πειραματική μέτρηση και ως δεύτερο την εκτίμηση των τυπικών αβεβαιοτήτων, $u(x_i)$, όλων των παραμέτρων (x_i) που υπεισέρχονται στο μοντέλο.

Στη συνέχεια θεωρώντας ότι η συνάρτηση που περιγράφει το μοντέλο της πειραματικής μέτρησης είναι η $y = F(x_1, x_2 ... x_N)$, όπου x_i είναι οι μετρήσιμες ποσότητες και παράμετροι του μοντέλου, η συνολική τυπική αβεβαιότητα, $u(y)$, δίνεται σαν συνάρτηση των επιμέρους τυπικών αβεβαιοτήτων, $u(x_i)$, (μέθοδος διάδοσης αβεβαιοτήτων) από την εξίσωση

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[c_i \cdot u(x_i)\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)} \qquad (1)$$

όπου $c_i = \left.\frac{\partial F}{\partial X_i}\right|_{x_i}$ και $r(x_i,x_j)$ ο συντελεστής συσχέτισης. Η εξίσωση 1 για την περίπτωση που οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους απλοποιείται σε

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[c_i \cdot u(x_i)\right]^2} \qquad (2)$$

Τέλος, μετά και τον υπολογισμό των ενεργών βαθμών ελευθερίας[1], κάνοντας χρήση της κατανομής Student υπολογίζεται η διευρυμένη αβεβαιότητα, $U(y)$, για το απαιτούμενο ποσοστό εμπιστοσύνης, $U(y)=k\,u(y)$, όπου k είναι ο συντελεστής επικάλυψης που αντιστοιχεί στους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας που υπολογίσαμε και το ζητούμενο ποσοστό εμπιστοσύνης. Το διάστημα εμπιστοσύνης ή με άλλα λόγια το διάστημα που εμπεριέχει όλες τις τιμές που μπορούν *λογικά* (ποσοστό εμπιστοσύνης) να αποδοθούν στην μετρούμενη φυσική ποσότητα δίνεται από

$$(\bar{y} - U(y), \bar{y} + U(y)) \text{ ή } Y = \bar{y} \pm U(Y) \qquad (3)$$

όπου $\bar{y}$ η μέση τιμή της μετρούμενης ποσότητας, θεωρώντας ότι η κατανομή των αποτελεσμάτων είναι Gaussian ή Student με αναμενόμενη τιμή ίση με $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση ίση με $u(y)$.

Παρόλο που η παραπάνω μέθοδος χρησιμοποιείται στις περισσότερες των περιπτώσεων, πολλές φορές χωρίς δεύτερη σκέψη, πρέπει κανείς να έχει υπόψη του ότι

- Οι εξισώσεις 1 και 2 προκύπτουν μετά από ανάπτυξη σε σειρά Taylor της εξίσωσης που περιγράφει την πειραματική μέτρηση και κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους. Συνεπώς σε περιπτώσεις όπου η μέτρηση δεν περιγράφεται από γραμμική ή σχεδόν γραμμική εξίσωση πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή για το αν όροι μεγαλύτερης τάξης πρέπει να ληφθούν υπόψη.

- Οι κατανομές που υπεισέρχονται ή προκύπτουν από τους υπολογισμούς πρέπει να είναι συμμετρικές. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται σε μη συμμετρικές κατανομές όπως αυτές που συναντώνται σε εφαρμογές ακουστικών, ηλεκτρικών και οπτικών μετρήσεων όπου συχνά χρησιμοποιούνται και μιγαδικές μεταβλητές.

- Οι προϋποθέσεις του κεντρικού οριακού θεωρήματος (central limit theorem) πρέπει να πληρούνται. Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι η κατανομή του αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών που δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή τείνει ασυμπτωτικά προς την κανονική κατανομή καθώς ο αριθμός των μεταβλητών μεγαλώνει. Όσο πιο κοντά στην κανονική κατανομή είναι οι επιμέρους κατανομές και όσο πιο παρόμοια είναι τα εύρη των κατανομών τόσο λιγότερες μεταβλητές απαιτούνται ώστε η κατανομή του αθροίσματος να είναι σχεδόν κανονική.

- Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται όταν υπάρχει μία συνιστώσα της οποίας η τυπική αβεβαιότητα είναι τόσο μεγάλη ώστε να κυριαρχεί όλων των άλλων έτσι ώστε να είναι συγκρίσιμη με το τελικό αποτέλεσμα.

Η διακρίβωση πρότυπων πλακιδίων μήκους με μηχανικό συγκριτή απαιτεί σύμφωνα με το ISO 3650 την μέτρηση του μήκους τους σε πέντε σημεία (κεντρικό μήκος και τέσσερις γωνίες). Ως διακύμανση του μήκους (variation in length) των πρότυπων πλακιδίων ορίζεται η διαφορά μήκους μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης μετρούμενης τιμής μεταξύ των πέντε αυτών σημείων. Η διακύμανση του μήκους των πλακιδίων μαζί με την απόκλιση του κεντρικού μήκους από την ονομαστική τους τιμή χρησιμοποιούνται για την κατάταξη των πλακιδίων σε κλάσεις. Συνεπώς, η σωστή μέτρηση της διακύμανσης του μήκους των πλακιδίων και ο υπολογισμός της αβεβαιότητας της καθορίζουν πια πλακίδια δεν πληρούν τις προδιαγραφές της κλάσης τους και άρα πρέπει να αντικατασταθούν.

2. Υπολογισμός της αβεβαιότητας μέτρησης της διακύμανσης μήκους πλακιδίου.

Οι κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν την ακρίβεια της μέτρησης της διακύμανσης του μήκους ενός πλακιδίου είναι αυτοί που επηρεάζουν και την μέτρηση του μήκους του με εξαίρεση τους παράγοντες που αφορούν το πρότυπο πλακίδιο, καθώς και τους παράγοντες που αφορούν την διαφορά μεταξύ συντελεστών διαστολής και θερμοκρασίας μεταξύ του προτύπου και προς του μέτρηση πλακιδίου.

Άρα οι κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν την κάθε μία από τις πέντε μετρήσεις είναι:

δl_k, η διακριτική ικανότητα του συγκριτή: ±5 nm.

δl_R, επαναληψιμότητα, μετρήσεις κάτω από τις ίδιες συνθήκες έχουν δώσει αποτελέσματα τα οποία βρίσκονταν μεταξύ των ορίων ±10 nm.

δl_c, γεωμετρικοί παράγοντες και ευθυγράμμιση των αισθητήρων, εκτιμάται ότι τα σφάλματα που προκύπτουν από την ευθυγράμμιση των αισθητήρων και την επαναληψιμότητα των σημείων μέτρησης είναι μεταξύ των ορίων ±8 nm.

δl_v, ποιότητα των επιφανειών (ύπαρξη ελαφρών χαραγών κτλ.), η ποιότητα των επιφανειών μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα μίας μέτρησης κατά ±20 nm

Το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει κάθε μία από τις πέντε μετρήσεις είναι:

$$L_i = l_i + \delta l_k + \delta l_R + \delta l_c + \delta l_v + C$$

όπου l_i είναι η μετρούμενη με το συγκριτή τιμή (μέσος όρος τριών μετρήσεων) και C αυθαίρετη σταθερά που εξαρτάται από το που μηδενίζουμε το συγκριτή. Συνήθως μηδενίζουμε το συγκριτή στο κεντρικό σημείο του πλακιδίου πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα $C=l_1=0$ nm. Ως συνέπεια των παραπάνω το μοντέλο που περιγράφει τις μετρήσεις δίνεται από:

$$L_i = l_i + \delta l_k + \delta l_R + \delta l_c + \delta l_v \qquad (4)$$

Και άρα η διακύμανση του μήκους (variation in length) του πλακιδίου δίνεται από

$$v = \max(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) - \min(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) \qquad (5)$$

Το μοντέλο κάθε μίας μέτρησης όπως περιγράφεται από την εξίσωση (4) είναι γραμμικό και άρα ο υπολογισμός της αβεβαιότητας $u(L_i)$ πραγματοποιείται σύμφωνα με το GUM βλέπε Πίνακα 1.

Πίνακας 1. Πίνακας αβεβαιοτήτων $u(L_i)$

Παράμετρος	**$u(x_i)$ - nm**	**Τύπος**	**c_i**	**v_i**	**$c_i*u(x_i)$ - nm**
l_i	5.0	A	1	2	5.0
δl_k	2.9	B	1	∞	2.9
δl_R	5.8	B	1	13	5.8
δl_c	4.6	B	1	13	4.6
δl_v	11.5	B	1	13	11.5

$u(L_i)$=14.9 nm, ν_{eff}=27, και $U(L_i)=30$ *nm* για $k=2$.

Για να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της διακύμανσης v, μια και αυτή προκύπτει από την διαφορά της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι αυτή δίνεται από

$$u(v) = \sqrt{u(L_{\max})^2 + u(L_{\min})^2} = \sqrt{2} \cdot u(L_i) = 21 nm \text{ και } U(v)=42 \text{ nm } (k=2) \qquad (6)$$

Οι πειραματικές μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν κατά την διάρκεια διεργαστηριακής σύγκρισης για ένα πλακίδιο 10 mm του ΕΙΜ: l_1=0 nm, l_2=10 nm, l_3=10 nm, l_4=20 nm, l_5=10 nm, έχουν ως αποτέλεσμα, σύμφωνα με το παραπάνω σκεπτικό, τη διακύμανση μήκους του πλακιδίου να είναι v=20 nm. Η οποία λαμβάνοντας υπόψη και τη διευρυμένη αβεβαιότητα (Εξ. 6) συνεπάγεται ένα διάστημα εμπιστοσύνης από -22 nm έως 62 nm

$$v=20\pm 42 \text{ nm} \quad \text{ή} \quad (v_{min}, v_{max})=(-22 \text{ nm}, 62 \text{ nm}) \text{ για } (k=2) \tag{7}$$

Το λανθασμένο του παραπάνω αποτελέσματος γίνεται αμέσως αντιληπτό από το γεγονός ότι η διακύμανση του μήκους ενός πλακιδίου μπορεί από τον ορισμό της να πάρει μόνο θετικές τιμές. Το εσφαλμένο του παραπάνω συλλογισμού είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι η διαφορά της μέγιστης μείον της ελάχιστης τιμής δεν είναι μία συνάρτηση που πληροί της προϋποθέσεις του GUM. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό εάν για παράδειγμα υποθέσει κανείς ότι η διακύμανση υπολογιζόταν μόνο από δύο τιμές, τότε, η διαφορά της μέγιστης μείον της ελάχιστης τιμής θα ήταν ισοδύναμη με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο τιμών, συνάρτηση που όλοι γνωρίζουμε ότι δεν έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο μηδέν.

3. Monte Carlo μέθοδος υπολογισμού της αβεβαιότητας μέτρησης της διακύμανσης μήκους πλακιδίου.

Στο τμήμα αυτό της εργασίας, ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της αβεβαιότητας της διακύμανσης μήκους ενός πλακιδίου θα πραγματοποιηθεί με αριθμητικές μεθόδους Monte Carlo όπως αυτές περιγράφονται σε συμπλήρωμα του GUM[5] για την περίπτωση άπειρων βαθμών ελευθερίας, και στην εργασία του B.D. Hall[6] για την περίπτωση των πεπερασμένων βαθμών ελευθερίας.

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες πειραματικές μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν κατά την διάρκεια διεργαστηριακής για ένα πλακίδιο 10 mm του ΕΙΜ: l_1=0 nm, l_2=10 nm, l_3=10 nm, l_4=20 nm, l_5=10 nm, και θεωρώντας ότι η αβεβαιότητα για κάθε μία από τις τιμές είναι αυτή που προκύπτει από τον Πίνακα 1, $u(L_i)$=14.9 nm με άπειρους βαθμούς ελευθερίας, δημιουργούμε τις απαραίτητες κατανομές ψευδό-τυχαίων αριθμών για τις πέντε μετρήσεις (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) και στην συνέχεια υπολογίζουμε για κάθε πεντάδα το μέγιστο μείον το ελάχιστο, με άλλα λόγια την διακύμανση.

Στο Πίνακα 1 των αβεβαιοτήτων η αβεβαιότητα $u(L_i)$=14.9 nm έχει υπολογιστεί και συνοδεύεται από πεπερασμένους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας, ν_{eff}=27 πράγμα που σημαίνει ότι είμαστε αβέβαιοι για την τιμή της αβεβαιότητας (παράγραφος G.4.2 του GUM).

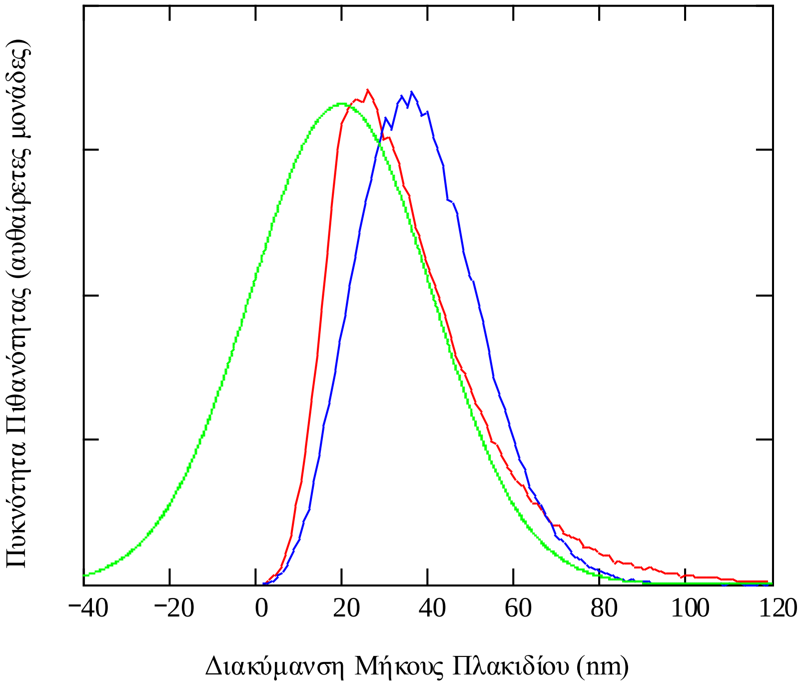
$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right)^{-2} \tag{8}$$

Για να ληφθεί υπόψη και η παράμετρος αυτή, επαναλαμβάνουμε τους αριθμητικούς υπολογισμούς δημιουργώντας αυτή τη φορά και μία κατανομή που αφορά τις τιμές της αβεβαιότητας, λαμβάνοντας υπόψη στον αριθμητικό υπολογισμό όλες αυτές τις πιθανές τιμές της.

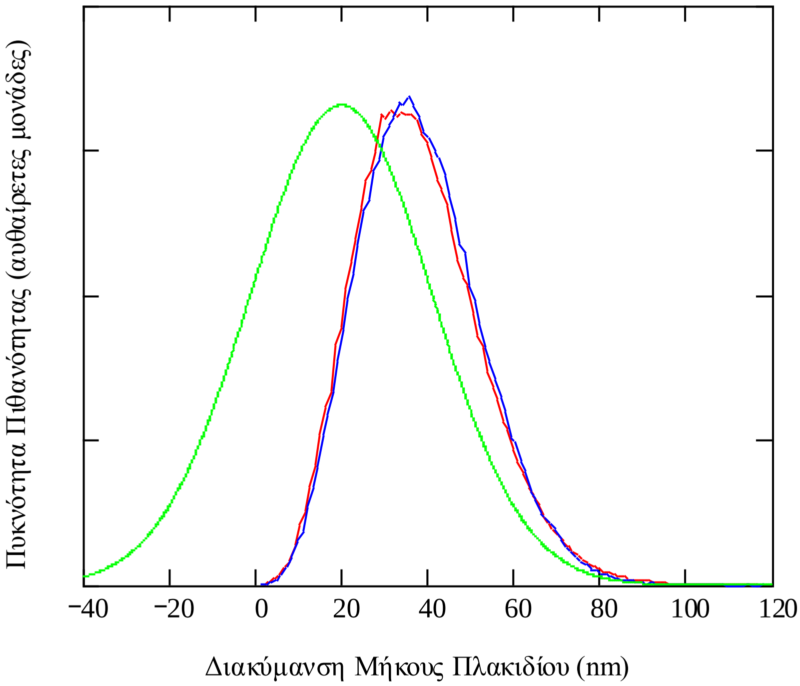
Η κατανομή των τιμών της αβεβαιότητας στην περίπτωση αυτή δίνεται από[6]:

$$\frac{u(L_i)}{\nu}\chi_\nu \tag{9}$$

όπου χ_ν είναι η κατανομή χ με ν βαθμούς ελευθερίας. Τα αποτελέσματα του αριθμητικού υπολογισμού δίνονται με κόκκινη γραμμή στα Σχήματα 1 και 2 για ενεργούς βαθμούς ελευθερίας ν_{eff}=3 και ν_{eff}=27 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του αριθμητικού υπολογισμού για άπειρους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας (μπλε γραμμή), αλλά και με αυτά που προκύπτουν από την εξίσωση 7 (πράσινη γραμμή).



Σχήμα 1. Πυκνότητα πιθανότητας της διακύμανσης μήκους πλακιδίου, με $\nu_{eff}=3$ ενεργούς βαθμούς ελευθερίας (κόκκινη γραμμή), για $\nu_{eff}=\infty$ (μπλε γραμμή), και για τον υπολογισμό της εξίσωσής 7 (πράσινη γραμμή).



Σχήμα 2. Πυκνότητα πιθανότητας της διακύμανσης μήκους πλακιδίου, με $\nu_{eff}=27$ ενεργούς βαθμούς ελευθερίας (κόκκινη γραμμή), για $\nu_{eff}=\infty$ (μπλε γραμμή), και για τον υπολογισμό της εξίσωσής 7 (πράσινη γραμμή).

Από τα σχήματα 1 και 2 βλέπουμε ότι η πιο πιθανή τιμή της διακύμανσης του πλακιδίου μήκους είναι μεγαλύτερη από αυτή που προκύπτει από την απλή διαφορά της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής όπως αυτή δίνεται από την εξίσωση 7, και ειδικά στην περίπτωση όπου οι βαθμοί ελευθερίας που αφορούν την κάθε μία από τις πέντε μετρήσεις είναι λιγότεροι από 10, τότε και το σχήμα της κατανομής παύει να είναι και συμμετρικό.
Τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης (95%) δίνονται από:

GUM, εξ. 7: $(v_{min}, v_{max}) = (-22\text{ nm}, 62\text{ nm})$
Monte Carlo veff=27: $(v_{min}, v_{max}) = (17\text{ nm}, 65\text{ nm})$

Οι παραπάνω διαφορές μεταξύ των ορίων εμπιστοσύνης οφείλονται στο ότι το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την μέτρηση δεν πληροί όλες τις προϋποθέσεις που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου που περιγράφεται στο GUM.

4. Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή παρουσιάσαμε αποτελέσματα υπολογισμού της αβεβαιότητας της διακύμανσης μήκους πλακιδίων. Από την σύγκριση αναλυτικών (όπως αυτές περιγράφονται στο “Guide to the expression of uncertainty in measurement”-*GUM*) και αριθμητικών (Monte Carlo) μεθόδων υπολογισμού της αβεβαιότητας μέτρησης προκύπτει ότι οι δύο μέθοδοι οδηγούν σε αποτελέσματα που δεν συμφωνούν μεταξύ τους. Η μέθοδος Monte Carlo δίνει ως πιο πιθανή τιμή της διακύμανσης, v, μια τιμή μεγαλύτερη από αυτή της αναλυτικής μεθόδου. Επίσης το υπολογιζόμενο διάστημα εμπιστοσύνης, σε αντίθεση με την μέθοδο του GUM, βρίσκεται πάντα στις θετικές τιμές, όπως άλλωστε αναμένεται και από τον ορισμό της διακύμανσης μήκους των πλακιδίων. Ο λόγος για την ασυμφωνία αυτή είναι ότι οι συναρτήσεις του μεγίστου και του ελαχίστου δεν πληρούν όλες τις προϋποθέσεις εφαρμογής του αναλυτικού υπολογισμού και συνεπώς η μέθοδος υπολογισμού των αβεβαιοτήτων όπως περιγράφεται στο GUM δεν πρέπει να εφαρμόζεται στην περίπτωση του υπολογισμού της διακύμανσης του μήκους των πλακιδίων.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

[1] ISO, *Guide to the expression of uncertainty in measurement.* (International Organization for Standardization, 1995).

[2] EA-4/02, *Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration* (European co-operation for Accreditation, 1999).

[3] C. F. Dietrich, *Uncertainty, Calibration and Probability* (Adam Hilger, Bristol, 1991).

[4] I. Lira, *Evaluating the Measurement Uncertainty* (IOP, Bristol and Philadelphia, 2002).

[5] ISO, *Guide to the expression of uncertainty in measurement. Supplement 1. Numerical methods for the propagation of distributions* (International Organization for Standardization, 2004).

[6] B. D. Hall, *Computer modelling of uncertainty calculations with finite degrees of freedom,* Meas. Sci. Technol. **11**, 1335 (2000).