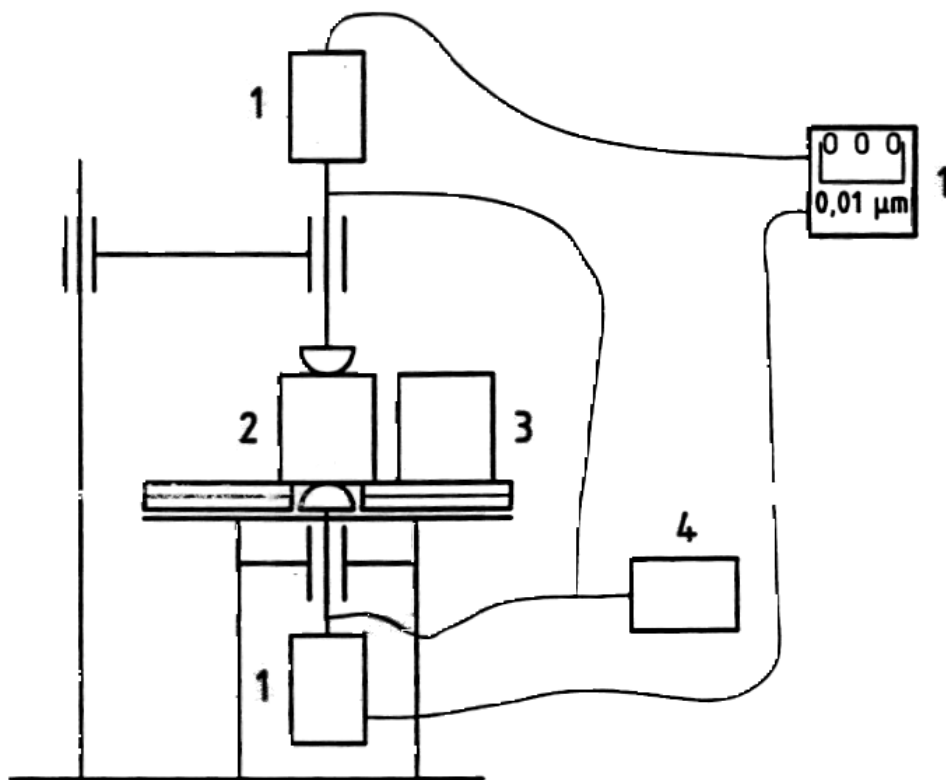


Αβεβαιότητα Μέτρησης της Διακύμανσης Μήκους Προτύπων Πλακιδίων Μήκους Monte Carlo Υπολογισμός με Πεπερασμένους Βαθμούς Ελευθερίας

Χρήστος Μπαντής, Ιωάννης Κουρούπας
Ελληνικό Ινστιτούτο Μετρολογίας
Βιομηχανική Περιοχή Θεσσαλονίκης, Οικ. Τετρ. 45
57022 Σίνδος, Θεσσαλονίκη
e-mail: bandis@eim.org.gr



Μέτρηση με σύγκριση...



Διακρίβωση πλακιδίων μήκους

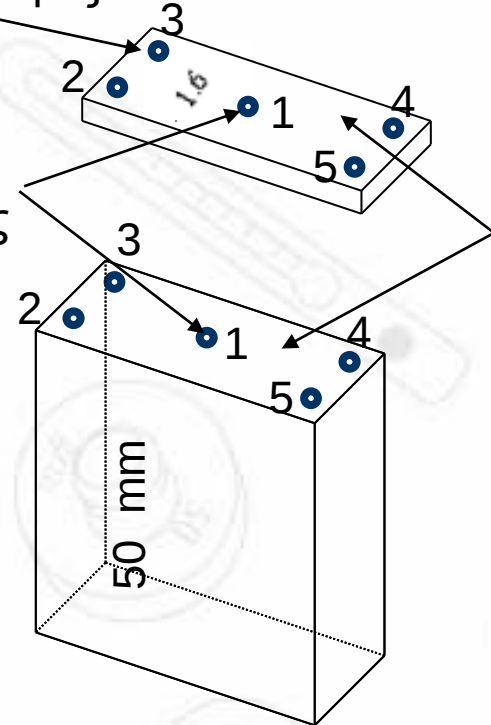


Η διακρίβωση
πρότυπων πλακιδίων
μήκους με μηχανικό
συγκριτή απαιτεί
σύμφωνα με το ISO
3650 την μέτρηση
του μήκους τους σε
πέντε σημεία
(κεντρικό μήκος και
τέσσερις γωνίες).

Σημεία μέτρησης
1,5 mm από τις ακμές

Σημείο μέτρησης
Κεντρικού μήκους

Πάνω
Επιφάνεια



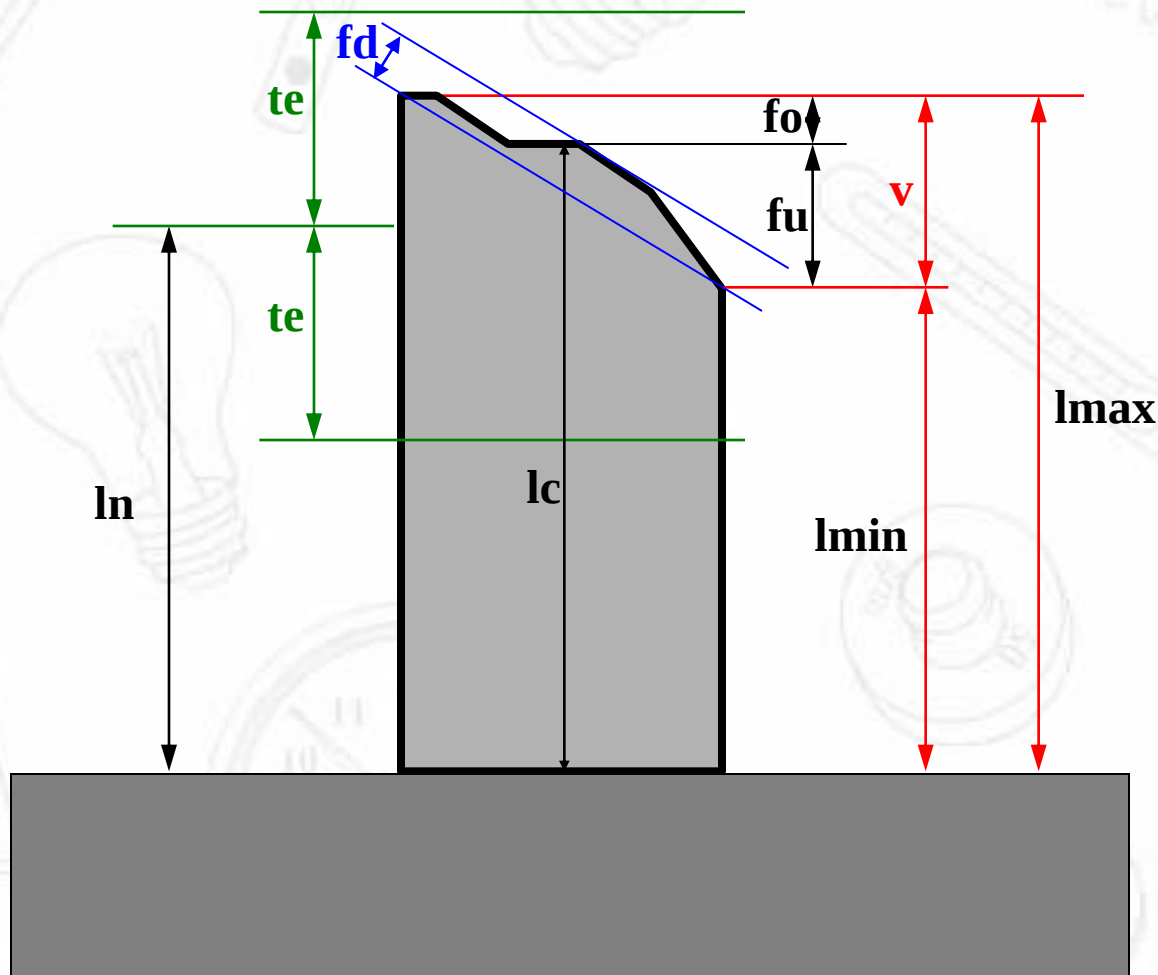
Διακύμανση Πλακιδίων Μήκους



- Ως διακύμανση (v) του μήκους (variation in length) των πρότυπων πλακιδίων ορίζεται η διαφορά μήκους μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης μετρούμενης τιμής μεταξύ των πέντε αυτών σημείων.

$$v = \max(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) - \min(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$$

Πλακίδιο μήκους διαγραμματικά...



Επιλογή Μοντέλου...



- Αρχικά επιλέγουμε την συνάρτηση που περιγράφει την διαδικασία της μέτρησής μας.

$$y = F(x_1, x_2 \dots x_N) \quad (1)$$

- όπου x_i είναι οι μετρήσιμες ποσότητες και παράμετροι του μαθηματικού μοντέλου.

Παράμετροι αβεβαιότητας



- Οι κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν την κάθε μία από τις πέντε μετρήσεις είναι:
- δl_k , η διακριτική ικανότητα του συγκριτή: $\pm 5 \text{ nm}$.
- δl_R , επαναληψιμότητα, μετρήσεις κάτω από τις ίδιες συνθήκες έχουν δώσει αποτελέσματα τα οποία βρίσκονταν μεταξύ των ορίων $\pm 10 \text{ nm}$.
- δl_c , γεωμετρικοί παράγοντες και ευθυγράμμιση των αισθητήρων, εκτιμάται ότι τα σφάλματα που προκύπτουν από την ευθυγράμμιση των αισθητήρων και την επαναληψιμότητα των σημείων μέτρησης είναι μεταξύ των ορίων $\pm 8 \text{ nm}$.
- δl_v , ποιότητα των επιφανειών (ύπαρξη ελαφρών χαραγών κτλ.), η ποιότητα των επιφανειών μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα μίας μέτρησης κατά $\pm 20 \text{ nm}$

Επιλογή κατανομών των x_i ...



Διαθέσιμη πληροφορία που αφορά την παράμετρο x_i .	Κατανομή πυκνότητας πιθανότητας που αποδίδεται στη παράμετρο x_i .
Αναμενόμενη τιμή x και τυπική αβεβαιότητα $u(x)$.	Κανονική / Gaussian κατανομή.
Τα άκρα (α, β) ενός διαστήματος μέσα στα οποία μεταβάλλεται η παράμετρος x_i .	Τετραγωνική κατανομή με άκρα (α, β) .
Οι ανεξάρτητες τιμές μετρήσεων που ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσω όρο $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s .	t-κατανομή με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.
Τα άκρα (α, β) ενός διαστήματος μέσα στα οποία μεταβάλλεται η παράμετρος x_i με ημιτονοειδή μορφή.	Arcsine κατανομή (U-shaped κατανομή).
Αναμενόμενη τιμή x μιας παραμέτρου που παίρνει μόνο θετικές τιμές.	Εκθετική κατανομή.

Αβεβαιότητα ISO 'GUM'



$$y = F(x_1, x_2 \dots x_N) \quad u(x_i)$$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[c_i \cdot u(x_i) \right]^2}$$

$$c_i = \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{x_i}$$

$$U(y) = k \cdot u(y)$$

$$(\bar{y} - U(y), \bar{y} + U(y))$$

$$Y = \bar{y} \pm U(y)$$

GUM Υπολογισμός αβεβαιότητας



$$L_i = l_i + \delta l_k + \delta l_R + \delta l_c + \delta l_v$$

Παράμετρος	$u(x_i)$ -nm	Τύπος	c_i	v_i	$c_i * u(x_i)$
l_i , μετρήσεις	5.0	A	1	2	5.0
δl_k , διακριτική ικανότητα	2.9	B	1	13	2.9
δl_R επαναληψιμότητα	5.8	B	1	13	5.8
δl_c γεωμετρ. παράγοντες	4.6	B	1	13	4.6
δl_v ποιότητα επιφανειών	11.5	B	1	13	11.5

$u(L_i) = 14.9 \text{ nm}$, $v_{\text{eff}} = 27$, και $U(L_i) = 30 \text{ nm}$ για $k=2$.

άρα η διακύμανση δίνεται από...



Για $l_{\max}=30 \text{ nm}$ $l_{\min}=10 \text{ nm}$, $v = 20 \text{ nm}$

$$u(v) = \sqrt{u(L_{\max})^2 + u(L_{\min})^2} = \sqrt{2} \cdot u(L_i) = 21 \text{ nm} \quad \text{και} \quad U(v) = 42 \text{ nm} \quad (k=2)$$

$$v = 20 \pm 42 \text{ nm}$$

$$\text{ή} \quad (v_{\min}, v_{\max}) = (-22 \text{ nm}, 62 \text{ nm}) \text{ για } (k=2)$$

Η διακύμανση του μήκους ενός πλακιδίου μπορεί από τον ορισμό της να πάρει μόνο θετικές τιμές

Προϋποθέσεις εφαρμογής ISO 'GUM'

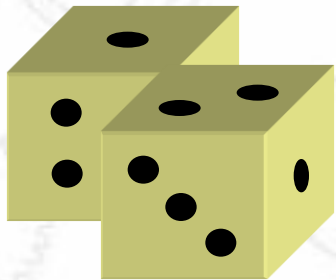


- Γραμμικότητα μοντέλου.
- Ισχύς του κεντρικού οριακού θεωρήματος.
- Συμμετρικές κατανομές.
- Καμίας παραμέτρου η αβεβαιότητα δεν είναι τόσο μεγάλη ώστε να κυριαρχεί όλων των άλλων.

Μέθοδος Monte Carlo



- Η επιλογή του μοντέλου και των κατανομών.

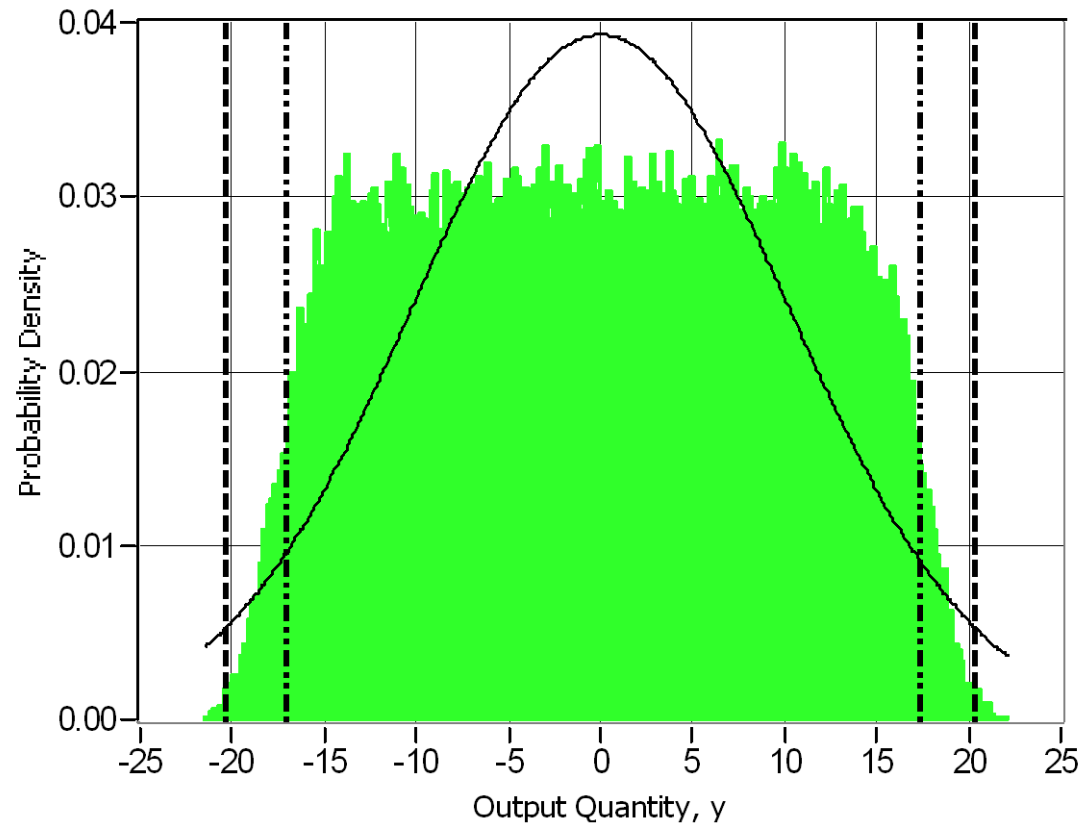


- Δημιουργία M ανεξάρτητων τυχαίων τιμών για κάθε μία από τις N παραμέτρους που ακολουθούν τις επιλεγμένες κατανομές.

$$\{(x_{11}, x_{21} \dots x_{N1}), (x_{12}, x_{22} \dots x_{N2}), \dots, (x_{1M}, x_{2M} \dots x_{NM})\}$$

- Για μεγάλο αριθμό M υπολογίζουμε τις τιμές των y_i , προσεγγίζουμε τη συνάρτησης αθροιστικής πυκνότητας πιθανότητας, και υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή, την τυπική απόκλιση, καθώς και το διάστημα εμπιστοσύνης για το απαιτούμενο ποσοστό εμπιστοσύνης.

Μέθοδος Monte Carlo



Πεπερασμένοι Βαθμοί ελευθερίας



Βαθμοί ελευθερίας:

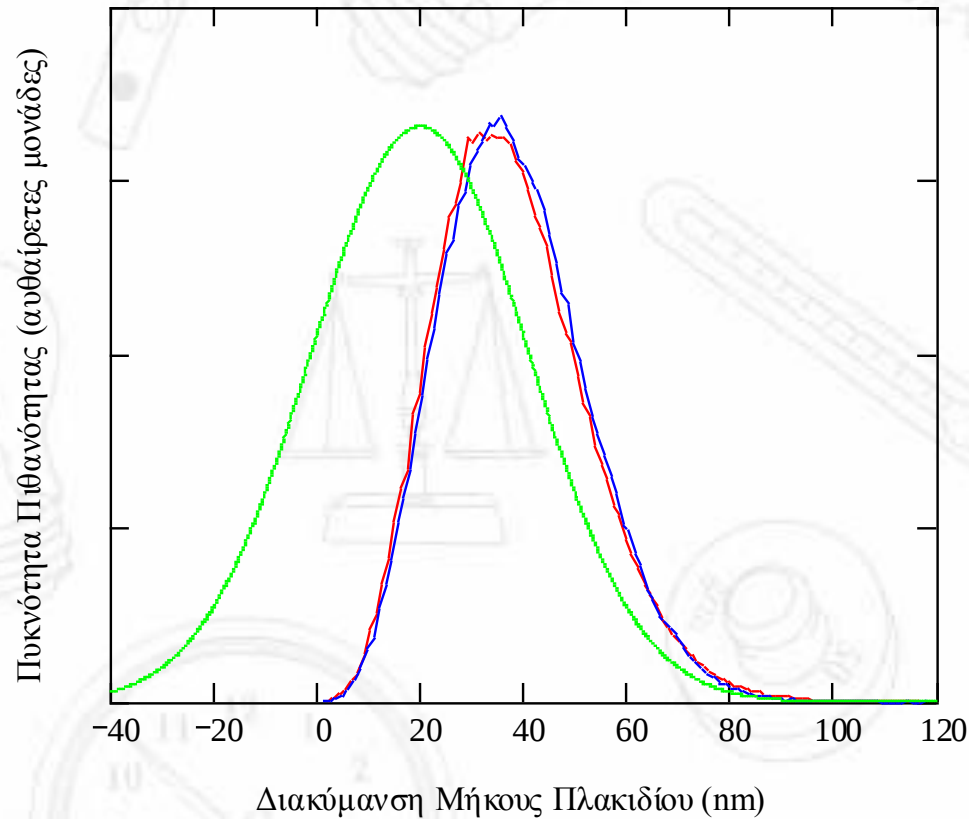
$$\nu_i \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right)^{-2}$$

Κατανομή τιμών αβεβαιότητας*:

$$\frac{u(L_i)}{\sqrt{\nu}} \chi_\nu$$

*B. D. Hall,, Meas. Sci. Technol. 11, 1335 (2000)

Σύγκριση αποτελεσμάτων



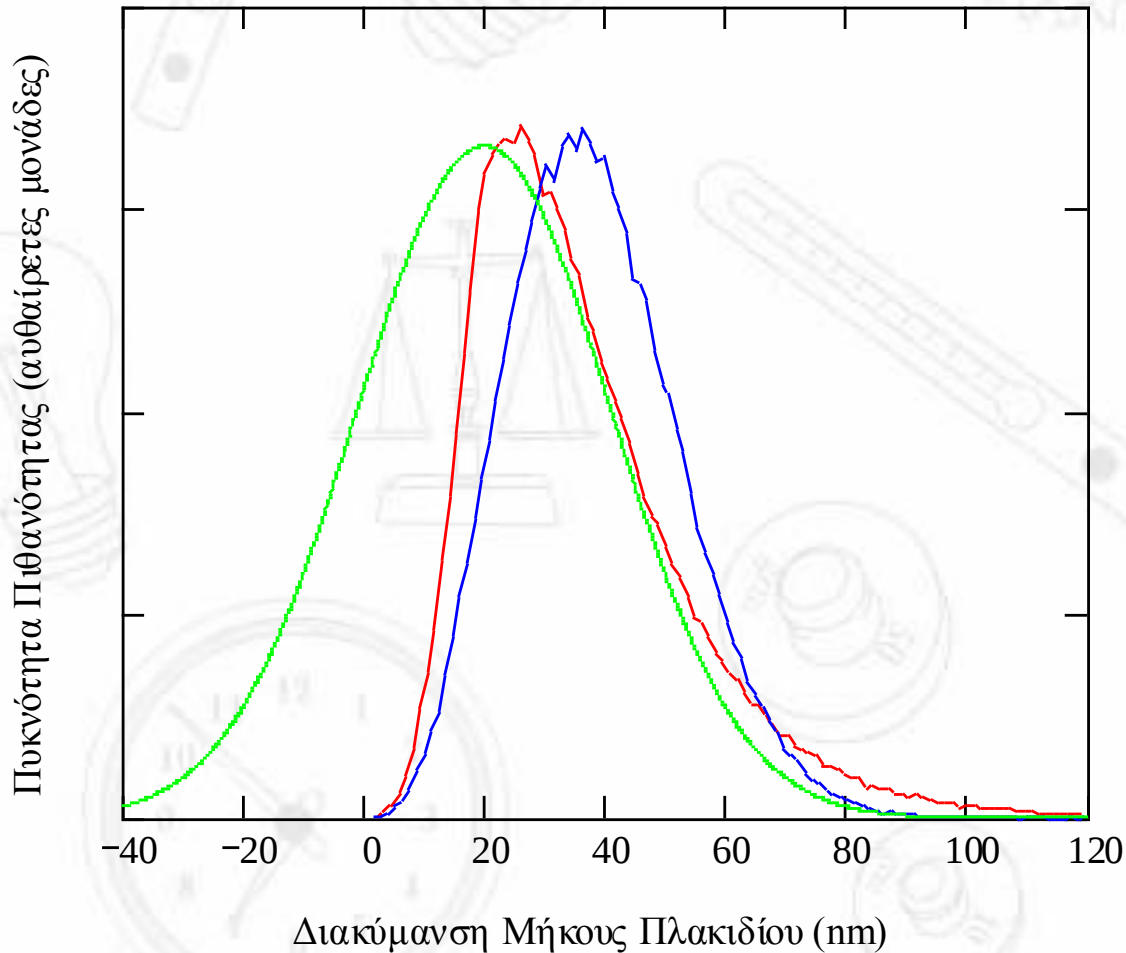
GUM:

$(v_{\min}, v_{\max}) = (-22 \text{ nm}, 62 \text{ nm})$

Monte Carlo $v_{\text{eff}}=27$:

$(v_{\min}, v_{\max}) = (17 \text{ nm}, 65 \text{ nm})$

Αποτελέσματα- Πεπερασμένοι βαθμοί ελευθερίας



Συμπεράσματα



- Οι δύο μέθοδοι υπολογισμού της αβεβαιότητας της διακύμανσης μήκους των πλακιδίων οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα:
 - Διαφορετική μέση τιμή
 - Διαφορετικό διάστημα εμπιστοσύνης
- Η επιλογή της μεθόδου υπολογισμού της αβεβαιότητας πρέπει να γίνεται με προσοχή και συνέπεια σε κάθε περίπτωση.